IES Rey Fernando VI
San Fernando de Henares
Departamento de Física y Química

Problemas Resueltos
Primera Parte

Movimiento Armónico Simple
Movimiento Ondulatorio
El Sonido

Profesor : Jesús Millán Crespo
Grupo : Fisica 2º Bachillerato
Fecha : 10 de mayo de 2009

1. Vibraciones y Ondas

1.1. Movimiento armónico

1. Un muelle cuya constante de elasticidad es k está unido a una masa puntual de valor m. Separando la masa de la posición de equilibrio el sistema comienza a oscilar. Determine:
a) El valor del período de las oscilaciones T y su frecuencia angular ω.
b) Las expresiones de las energías cinética, potencial y total en función de la amplitud y de la elongación del movimiento del sistema oscilante.
Solución:
Se trata de un moviminto armnónico simple de constante elástica k y masa oscilante m.
a) La constante $k = m\omega^2 = m(\frac{2\pi}{T})^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
b) Las ecuaciones del movimiento son:
$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$ y $v = A\omega\cos(\omega t) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$
La energía cinética es:
$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$
La energía potencial es:
$Ep = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2$
La energía mecánica total será la suma de la Ec y la Ep:
$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}kA^2$

2. Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo período es igual a 1 s. Sabiendo que en el instante t = 0 su elongación es 0,70 cm y su velocidad 4,39 cm/s, calcule:
a) La amplitud y la fase inicial.
b) La máxima aceleración de la partícula
Solución:
Se trata de un mas con fase inicial φ_0 y pulsación $\omega = 2\pi$
a) Las ecuaciones del movimiento son:
$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$ y $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$ que sustituyendo en las condiciones iniciales... $0,70 = A\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$ y $4,39 = A\cdot 2\pi\cos(\varphi_0)$
Dividiendo ambas expresiones se obtiene $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_0 = 0,78 \text{ rad y } A = 1 \text{ cm}}$
b) Para determinar la aceleración máxima se calcula:
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Rightarrow$ $\boxed{a_{max} = \pm 39,08 \text{ m/s}^2}$

3. Un cuerpo de 200 g unido a un resorte horizontal oscila, sin rozamiento, sobre una mesa, a lo largo del eje de las X, con una frecuencia angular = 8,0 rad/s. En el instante t = 0, el alargamiento del resorte es de 4 cm respecto de la posición de equilibrio y el cuerpo lleva en ese instante una velocidad de -20 cm/s. Determine:
a) La amplitud y la fase inicial del movimiento armónico simple realizado por el cuerpo.
b) La constante elástica del resorte y la energía mecánica del sistema.
Solución:
Se trata de un mas con fase inicial φ_0 y pulsación $\omega = 8$ rad/s.
a) Las ecuaciones del movimiento son:
$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_0)$ y $v = A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)$ que sustituyendo en las condiciones iniciales... $4 = A\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$ y $-20 = 8A\cos(\varphi_0)$
Dividiendo ambas expresiones se obtiene $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_0 = 1,01 \text{ rad y } A = 4,71 \text{ cm}}$
b) Para determinar la constante elástica y la energía mecánica:
$k = m\omega^2 \Rightarrow \boxed{k = 12,8 \text{ N/m}}$
$Em = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{Em = 0,014 \text{ J}}$

4. Una masa de 2 kg está unida a un muelle horizontal cuya constante recuperadora es k =10 N/m. El muelle se comprime 5 cm desde la posición de equilibrio (x=0) y se deja en libertad. Determine:
a) La expresión de la posición de la masa en función del tiempo, x = x(t).
b) Los módulos de la velocidad y de la aceleración de la masa en un punto situado a 2 cm de la posición de equilibrio.
c) La fuerza recuperadora cuando la masa se encuentra en los extremos de la trayectoria.
d) La energía mecánica del sistema oscilante.
Nota: Considere que los desplazamientos respecto a la posición de equilibrio son positivos cuando el muelle está estirado.
Solución:
a) Es un mas de constante recuperadora k=10 N/m y masa oscilante m=2 kg. A partir de estos valores determinamos la pulsación ω.
$k = m\omega^2 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega = \sqrt{5}$
La expresión de la posición en función del tiempo, x(t) es $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_0)$. Puesto que partimos de un extremo la amplitud A=5 cm y la fase inicial $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

La expresión de la posición en función del tiempo es: $\boxed{x = 5\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}t - \frac{\pi}{2})\ \mathrm{cm}}$
b) Las expresiones de la velocidad y de la aceleración son:
$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ y $a = -\omega^2 x$ que sustituyendo para x=2 se tiene...
$\boxed{v_2 = 10,25\ \mathrm{cm/s}\ \mathrm{y}\ a_2 = -10\ \mathrm{cm}}$
c) La fuerza es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento y el los extremos $F = \pm kA \Longrightarrow \boxed{F = \pm 0,5\ \mathrm{N}}$
d)La espresión de la energía mecánica es: $Em = \frac{1}{2}kA^2$ que sustituyendo valores... $\boxed{Em = 0,0125\ \mathrm{J}}$

5. Se tiene una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa. Si se reduce a la mitad su frecuencia, razone qué ocurre con: a) el periodo; b) la velocidad de propagación; c) la longitud de onda; d) la amplitud.
Solución:
a) El periodo es inverso a la frecuencia y entonces el periodo se duplica.
b) La velocidad de una onda transversal en una cuerda solo depende de la tensión de la cuerda y de su densidad lineal según la expresión $v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$. Sin embargo en una onda estacionaria podemos disminuir a la mitad la frecuencia diminuyedo la tensión de la cuerda y entonces la velocidad disminuye a la mitad.
c) La velocidad de una onda es $v = \lambda f$ y si la frecuencia se reduce a la mitad la longitud de onda, λ se duplica.
d)La amplitud no depende de la frecuencia.

6. Una partícula de masa 3 g oscila con movimiento armónico simple de elongación en función del tiempo: $x = 0,5\cos(0,4t + 0,1)$, en unidades SI. Determine: a) La amplitud, la frecuencia, la fase inicial y la posición de la partícula en $t = 20$ s. b) Las energías cinéticas máxima y mínima de la partícula que oscila, indicando en qué posiciones se alcanzan.
Solución:
Se trata de una particula de masa m=3 g que oscila con un mas de constante recuperadora $K = m\omega^2 = 4,8 \cdot 10^{-4}$ N/m y $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,0636\ \mathrm{s}^{-1}$
a) Los valores de la Amplitud, la frecuencia y la posición se deducen directamente de la expresión
$\boxed{A = 0,5\ \mathrm{m};\ f = 0,0636\ \mathrm{s}^{-1}\ \mathrm{y}\ x_{20} = -0,122\ \mathrm{m}}$
b) El valor de la energía cinética es $Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$ y éste valor será:

- máximo cuando $x = 0$; $Ec = \frac{1}{2}kA^2 \Longrightarrow \boxed{Ec_{max} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ J}}$

- mínima cuando $x = A$; $Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - A^2) \Longrightarrow \boxed{Ec_{min} = 0 \text{ J}}$

7. Un bloque de 50 g, conectado a un muelle de constante elástica 35 N/m, oscila en una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 4 cm. Cuando el bloque se encuentra a 1 cm de su posición de equilibrio, calcule:
a) La fuerza ejercida sobre el bloque.
b) La aceleración del bloque.
c) La energía potencial elástica del sistema.
d) La velocidad del bloque.
Solución:
El bloque oscila con un mas y nos dan la masa, $m = 0,05$ kg, la constante elástica, $k = 35$ N/m, y la amplitud, $A = 0,04$ m.
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 26,46$ rad/s y se pide:
a) La $F_{0,01} = \pm kx \Longrightarrow \boxed{F_{0,01} = \pm 3,5 \cdot 10^{-1} \text{ N}}$
b) La $a_{0,01} = \pm \omega^2 x \Longrightarrow \boxed{a_{0,01} = \pm 7 \text{ m/s}^2}$
c) La $Ep_{0,01} = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep_{0,01} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ J}}$
d) La $v_{0,01} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Longrightarrow \boxed{v_{0,01} = \pm 1,025 \text{ m/s}}$

8. a) Al colgar una masa en el extremo de un muelle en posición vertical, éste se desplaza 5 cm; ¿de qué magnitudes del sistema depende la relación entre dicho desplazamiento y la aceleración de la gravedad? b) Calcule el periodo de oscilación del sistema muelle-masa anterior si se deja oscilar en posición horizontal (sin rozamiento). Dato: aceleración de la gravedad g = 9,81 m/s^2.
Solución:
a) Cuando colgamos un cuerpo de masa m de un muelle éste experimenta un alargamiento que debe cumplir la ley de Hoooke $F = k\triangle x$; por otra parte la única fuerza que actúa es el peso y podemos escribir $\ldots mg = k\triangle x$. De aquí se desprende que la relación entre el desplazamiento y la aceleración de la gravedad solo depende de la masa y la constante elástica del muelle, porque: $\boxed{\frac{\triangle x}{g} = \frac{m}{k}}$
b) El valor de la constante elástica, $k = \frac{mg}{\triangle x}$.

Por otra parte $k = m\omega^2$ y despejando el periodo, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ y sustituyendo el valor de k, tenemos que el periodo es:

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\dfrac{mg}{\triangle x}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\triangle x}{g}} \Rightarrow \boxed{T = 0,45 \text{ s}}$

9. Una partícula de masa 100 g realiza un movimiento armónico simple de amplitud 3 m y cuya aceleración viene dada por la expresión $a = -9\pi^2 x$ en unidades SI. Sabiendo que se ha empezado a contar el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo en los desplazamientos positivos, determine:
a) El periodo y la constante recuperadora del sistema.
b) La expresión matemática del desplazamiento en función del tiempo $x = x(t)$.
c) Los valores absolutos de la velocidad y de la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.
d) Las energías cinética y potencial en el punto donde tiene velocidad máxima.
Solución:
a) Nos dan la expresión de la aceleración: $a = -9\pi^2 x$ que comparándola con la ecuación de la aceleracion de un mas: $a = -\omega^2 x$ nos permite determinar directamente ω, T, y k.
$\boxed{\omega = 3\pi \text{ rad/s}; T = \frac{2}{3} \text{ s y } k = 0,9\pi^2 \text{ N/m}}$
b) Para determinar la ecuación $x(t)$, necesitamos saber primero la fase inicial φ_0. En el origen $t = 0$, $x = A$, $v = 0$ y $a = a_{max}$
$x = 3\,\text{sen}(3\pi t + \varphi_0)$ que para $t = 0$ se tiene $3 = 3\,\text{sen}(\varphi_0)$ y se obtiene un valor de $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ y la expresión $x(t)$ queda $\boxed{x = 3\,\text{sen}(3\pi t + \dfrac{\pi}{2})}$
c) Las expresiones de la velocidad y la acelración en función de x son:
$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Longrightarrow \boxed{v_{3/2} = 24,5 \text{ m/s}}$
$a = -9\pi^2 x \Longrightarrow \boxed{a_{3/2} = 133,24 \text{ m/s}^2}$
d) En el punto de máxima velocidad la Ec = Em y la Ep=0. $Ec = \dfrac{1}{2}kA^2$
$\Longrightarrow \boxed{Ec_{max} = 40 \text{ J y } Ep = 0 \text{ J}}$

10. Se tienen dos muelles de constantes elásticas k_1 y k_2 en cuyos extremos se disponen dos masas m_1 y m_2 respectivamente, y tal que $m_1 < m_2$. Al oscilar, las fuerzas que actúan sobre cada una de estas masas en función de la elongación aparecen representadas en la figura-1.
a) ¿Cuál es el muelle de mayor constante elástica?
b) ¿Cuál de estas masas tendrá mayor período de oscilación?

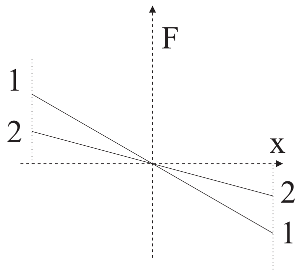

Figura 1: Ejercicio 10

Solución:
a) La gáfica representa la F en función de x, por tanto la pendiente es $-k$, y el primer muelle tendrá mayor contante elástica porque tiene mayor pendiente negativa, $k_1 > k_2$.

b) La constante elástica $k = m\omega^2 = m\dfrac{4\pi^2}{T^2}$ y cuanto mayor sea k menor sera el periodo T, entonces $T_1 < T_2$.

11. a) Determine la constante elástica k de un muelle, sabiendo que si se le aplica una fuerza de 0,75 N éste se alarga 2,5 cm respecto a su posición de equilibrio.
Unido al muelle anterior un cuerpo de masa 1,5 kg se constituye un sistema elástico que se deja oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Sabiendo que en $t = 0$ el cuerpo se encuentra en la posición de máximo desplazamiento, $x = 30$ cm, respecto a su posición de equilibrio, determine: b) La expresión matemática del desplazamiento del cuerpo en función del tiempo. c) La velocidad y la aceleración máximas del cuerpo. d) Las energías cinética y potencial cuando el cuerpo se encuentra a 15 cm de la posición de equilibrio.
Solución:
a) Una $F = 0,75$ N produce un alargamiento $\triangle x = 2,5$ cm, entonces la constante elástica $k = \dfrac{F}{\triangle x} \Longrightarrow \boxed{k = 30 \text{ N}}$
b) Dado que $k = m\omega^2$ entonces $\omega = \sqrt{20}$
La ecuación del mas es: $x = 0,3\,\text{sen}(\sqrt{2}t + \varphi_0)$ y sabiendo que cuando $t = 0$, $x = 0,3$ se tiene $0,3 = 0,3\,\text{sen}(\varphi_0)$ de donde $\varphi_0 = \pi/2$ y ya tenemos la expresión del desplazamiento en función del tiempo:$\Longrightarrow \boxed{x = 0,3\,\text{sen}(\sqrt{20}t + \frac{\pi}{2})}$
c) Las expresiones de la velocidad y la aceleración máximas son:

$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 1,34 \text{ m/s}}$
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 6 \text{ m/s}^2}$
d) Las expresiones de la Energía cinética y de la energía potencial son:
$Ec = \dfrac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow \boxed{Ec_{x=0,15} = 1,01 \text{ J}}$
$Ep = \dfrac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep_{x=0,15} = 0,34 \text{ J}}$

12. Una masa puntual de valor 150 g unida a un muelle horizontal de constante elástica $k = 65$ N·m^{-1} constituye un oscilador armónico simple. Si la amplitud del movimiento es de 5 cm, determine:
a) La expresión de la velocidad de oscilación de la masa en función de la elongación.
b) La energía potencial elástica del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula.
c) La energía cinética del sistema cuando la velocidad de oscilación es máxima.
d) La energía cinética y la energía potencial elástica del sistema cuando el módulo de la aceleración de la masa es igual a 13 m·s^{-2}.
Solución:
Las ecuaciones del movimiento armónico simple en función del tiempo y de la posición son en ausencia de fase inicial φ_0:
$x = A\,\text{sen}(\omega t)$
$v = A\omega\cos(\omega t)$ o en función de $x \Rightarrow v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$
$a = -A\omega^2\,\text{sen}(\omega t)$ o en función de $x \Rightarrow a = -\omega^2 x$
Se determina ω a partir de la constante elástica $k = m\omega^2$; y despejando $\omega = 20,82$ rad/s.
a) La expresión pedida de la velocidad $\Longrightarrow \boxed{v = 20,82\sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2 - x^2} \text{ m/s}}$
b) La $Ep = \displaystyle\int_0^x kxdx$ y resuelta $Ep = \dfrac{1}{2}kx^2$
cuando $v = 0$; $x = A$; $Ep = \dfrac{1}{2}kA^2 \Longrightarrow \boxed{Ep = 0,0813 \text{ J}}$
c) La velocidad es máxima cuándo $x = 0$; y la Ec es... $Ec = \dfrac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow$
$\boxed{Ec = 0,0813 \text{ J}}$
d) A partir de la expresión de la aceleración... $x = \dfrac{a}{\omega^2} \Rightarrow x = 0,03$ m
La energía potencial $Ep = \dfrac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep = 0,0295 \text{ J}}$
La energía cinética $Ec = \dfrac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow \boxed{Ec = 0,052 \text{ J}}$

13. Una partícula que describe un movimiento armónico simple

recorre una distancia de 16 cm en cada ciclo de su movimiento y su aceleración máxima es de 48 m/s^2. Calcule: a) la frecuencia y el periodo del movimiento; b) la velocidad máxima de la partícula.
Solución:
Si recorre 16 cm en cada ciclo la amplitud $A = 4$ cm
la $a_{max} = \pm\omega^2 A; \Rightarrow \omega = \pm 34,64$ rad/s
a) El periodo y la frecuencia se obtien a partir de la pulasación $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y $f = \dfrac{1}{T} \Longrightarrow \boxed{T = 0,18 \text{ s y } f = 5,51 \text{ s}^{-1}}$
b) La $v_{max} = A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = 1,38 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$

14. Un objeto de 2,5 kg está unido a un muelle horizontal y realiza un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 3,3 Hz. Determine: a) El periodo del movimiento y la constante elástica del muelle. b) La velocidad máxima y la aceleración máxima del objeto.
Solución:
Primero se calcula la frecuencia angular del movimiento $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 20,73$ rad/s
a) El periodo es el inverso de la frecuencia $\Longrightarrow \boxed{T = 0,30 \text{ s}}$
y la constnate recuperadora $k = m\omega^2 \Longrightarrow \boxed{k = 1074,8 \text{ N/m}}$
b) La velocidad máxima $v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 1,037 \text{ m/s}}$
y la aceleración máxima $a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 21,5 \text{ m/s}^2}$

15. Un cuerpo de masa m está suspendido de un muelle de constante elástica k. Se tira verticalmente del cuerpo desplazando éste una distancia X respecto de su posición de equilibrio, y se le deja oscilar libremente. Si en las mismas condiciones del caso anterior él desplazamiento hubiese sido 2X, deduzca la relación que existe, en ambos casos, entre: a) las velocidades máximas del cuerpo; b) las energías mecánicas del sistema oscilante.
Solución:
a) Se trata del mismo muelle luego la constante elástica k será la misma.

$$\left\{\begin{array}{lllll} v_{max_1} & = & A_1\omega_1 & = & x\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ & & & & \\ v_{max_2} & = & A_2\omega_2 & = & 2x\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{array}\right. \Rightarrow v_{max_2} = 2v_{max_1}$$

b) igualmente comaparando las energías mecánicas

$$\left\{\begin{array}{lllll} E_{m_1} & = & \frac{1}{2}kA_1^2 & = & \frac{1}{2}kx^2 \\ & & & & \\ E_{m_2} & = & \frac{1}{2}kA_2^2 & = & \frac{1}{2}k(2x)^2 \end{array}\right. \Rightarrow E_{m_2} = 4E_{m_1}$$

16. Una partícula de 5 g de masa se mueve con un movimiento armónico simple de 6 cm de amplitud a lo largo del eje X. En el instante inicial ($t = 0$) su elongación es de 3 cm y el sentido del desplazamiento hacia el extremo positivo. Un segundo más tarde su elongación es de 6 cm por primera vez. Determine:
a) La fase inicial y la frecuencia del movimiento.
b) La función matemática que representa la elongación en función del tiempo, $x = x(t)$.
c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de la partícula, así como las posiciones donde los alcanza.
d) La fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 1$ s y su energía mecánica.
Solución:

a) Se sustituyen valores en la ecuacón del mas para $t = 0$ s y $t = 1$ s.

$3 = 6\,\text{sen}(\varphi_0) \Longrightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}}$

$6 = 6\,\text{sen}(\omega \cdot 1 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$ rad; $T = 6$ s y $\boxed{f = \frac{1}{6} \text{ s}^{-1}}$

b) La ecuación del mas es: $\boxed{x = 6\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}) \text{ cm}}$

c) Las expresiones de la velocidad y aceleración máximas son:

$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 2\pi \text{ cm·s}^{-1} \text{ en } x = 0}$

$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm \frac{2\pi^2}{3} \text{ cm·s}^{-2} \text{ en } x = A}$

d) La fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 1$ s, es $F = -kx = -m\omega^2 x$ y sustituyendo valores... $\boxed{F_{x=0,01} = 3,29 \cdot 10^{-4} \text{ N}}$

Y la energía mecánica $Em = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{E_m = 9,87 \cdot 10^{-6} \text{ J}}$

17. Una partícula oscila con movimiento armónico simple según el eje Y en tomo al origen de coordenadas, originando una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 20 m/s, una amplitud de 0,02 m y una frecuencia de 10 Hz. Determine:
a) El periodo y la longitud de onda.
b) La expresión matemática de la onda, si en $t = 0$ la partícula situada en el origen de coordenadas está en la posición de máxima

elongación positiva.
Solución:
a) El perido $T = \dfrac{1}{f} \Longrightarrow \boxed{T = 0,1 \text{ s}}$; La velocidad $v = \lambda \cdot f \Longrightarrow \boxed{\lambda = 2 \text{ m}}$
b) La ecuaión es: $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$ Para $t = 0$; $x = A \Rightarrow A = A\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$ de donde... $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ rad y $\boxed{x(t) = 0,02\,\mathrm{sen}(20\pi t + \frac{\pi}{2})}$

1.2. Movimiento ondulatorio

1. La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa coincidente con el eje X, es: $y = 0,2\,\text{sen}(100\pi t - 200\pi x)$, en unidades SI. Determine:
a) Los valores del periodo, la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
b) La expresión matemática de la onda en términos de la función coseno.
Solución:
a) comparando la ecuación que nos dan con la de un movimiento ondulatorio...
$y = 0,2\,\text{sen}(100\pi t - 200\pi x)$ con la ecuación $y(x,t) = A\,\text{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$ se obtiene: $\omega = 1000\pi$ rad/s; $k = 200\pi$ m^{-1}; y $\boxed{A = 0,2 \text{ cm}}$

De la frecuencia angular se obtiene el periodo: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Longrightarrow \boxed{T = 0,02 \text{ s}}$

Del número de ondas la longitud de onda: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Longrightarrow \boxed{\lambda = 0,01 \text{ m}^{-1}}$

Y la velocidad a partir de la expresión: $v = \dfrac{\omega}{k} \Longrightarrow \boxed{v = 0,5 \text{ m·s}^{-1}}$

b) Sabiendo que: $\text{sen}(\alpha) = cos(\alpha - \pi/2) \Longrightarrow \boxed{y(x,t) = A\cos(\omega t - kx - \pi/2)}$

2. La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa orientada según el eje X es: $y = 0,5\,\text{sen}(6\pi t - 2\pi x)$ (x, y en metros; t en segundos). Determine:
a) Los valores de la longitud de onda y de la velocidad de propagación de la onda.
b) Las expresiones que representan la elongación y la velocidad de vibración en función del tiempo, para un punto de la cuerda situado a una distancia $x = 1,5$ m del origen.
c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de vibración de los puntos de la cuerda.
d) La distancia mínima que separa dos puntos de la cuerda que, en un mismo instante, vibran desfasados 2π radianes.
Solución:
a) Comparando la expresión que nos dan: $y = 0,5\,\text{sen}(6\pi t - 2\pi x)$ con la ecuación de onda se tiene: $A = 0,5$ m; $\omega = 6\pi$ rad/s; y $k = 2\pi$ m$^{-1} \Longrightarrow$
$\boxed{T = 0,5 \text{ s}; \ \lambda = 1 \text{ m}; \text{ y } v = 3 \text{ m/s}}$
b)$y_{x=1,5} = 0,5\,\text{sen}(6\pi t - 2\pi \cdot 1,5) \Longrightarrow \boxed{y_{x=1,5} = 0,5\,\text{sen}(6\pi t - 3\pi)}$
$v_{x=1,5} = 3\pi\cos(6\pi t - 2\pi \cdot 1,5) \Longrightarrow \boxed{v_{x=1,5} = 3\pi\cos(6\pi t - 3\pi)}$
c)$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = 3\pi \text{ m/s}}$
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = 18\pi^2 \text{ m/s}^2}$

d) Si los dos puntos vibran con un desfase de 2π rad estarán separados una longitud de onda $\Longrightarrow$ $\boxed{\Delta x = 1 \text{ m}}$

3. Escriba la expresión matemática de una onda armónica unidimensional como una función de x (distancia) y t (tiempo) y que contenga las magnitudes indicadas en cada uno de los siguientes apartados:
a) frecuencia angular y velocidad de propagación v;
b) período T y longitud de onda;
c) frecuencia angular y número de onda k.
d) Explique por qué es una función doblemente periódica.
Solución:
c) La ecuación habitual de la función de onda es: $y_{x,t} = A\cos(\omega t - kx)$
a) A partir de... $v = \dfrac{\omega}{k}$ se tiene: $y_{x,t} = A\cos\omega(t - \dfrac{x}{v})$
b) Con las relaciones: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ y $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ se tiene: $y_{x,t} = A\cos 2\pi(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda})$
c) La función de onda es doblemente periódica porque si se sustituye en la expresión t por $t + nT$ o x por $x + n\lambda$ se obtiene siempre la misma función. Es periódica con respecto al tiempo y con respecto a la posición.

4. Una onda armónica transversal de frecuencia 80 Hz y amplitud 25 cm se propaga a lo largo de una cuerda tensa de gran longitud, orientada según el eje X, con una velocidad de 12 m/s en su sentido positivo. Sabiendo que en el instante $t = 0$ el punto de la cuerda de abscisa $x = 0$ tiene una elongación $y = 0$ y su velocidad de oscilación es positiva, determine:
a) La expresión matemática que representa dicha onda.
b) La expresión matemática que representa la velocidad de oscilación en función del tiempo del punto de la cuerda de abscisa $x = 75$ cm.
c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de oscilación de los puntos de la cuerda.
d) La diferencia de fase de oscilación en un mismo instante entre dos puntos de la cuerda separados 37,5 cm.
Solución:
a) La expresión matemática de una onda es: $y_{x,t} = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$
Se conoce: $A = 0,25$ m; $\omega = 160\pi$ rad/s; $K = \frac{40}{3}\pi$ m^{-1}; y $\lambda = \frac{3}{20}$ m.
Yambién que $y_{(0,0)} = 0$ y que la $v_{(0,0)} > 0$

$0 = 0,25\cos(\varphi_0) \qquad 0 < -40\pi \operatorname{sen}(\varphi_0)$ de donde $\varphi_0 = -\pi/2$ rad.

Y la expresión de la onda es: $\boxed{y_{x,t} = 0,25\cos(160\pi t - \dfrac{40}{3}\pi x - \dfrac{\pi}{2})}$

b) La expresión de la velocidad es: $v_{x,t} = -40\pi \operatorname{sen}(160\pi t - \frac{40}{3}\pi x - \frac{\pi}{2})$

y en el punto $x = 0,75$ m. . . $\boxed{v_{x=0,75,t} = -40\pi \operatorname{sen}(160\pi t - \frac{21}{2}\pi)}$

c) Las expresiones de la velocidad y aceleración máximas son . . .

$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 40\pi \text{ m/s}}$

$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 6400\pi^2 \text{ m/s}^2}$

d) El desfase entre dos puntos separados $\Delta x = 0,75$ m es:

$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda} \cdot 2\pi \Longrightarrow \boxed{\Delta\varphi = 500\pi = n(2\pi) \text{ rad y están en fase}}$

5. El periodo de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa es de 2·10^{-3} s. Sabiendo, además, que dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase vale $\pi/2$ rad están separados una distancia de 10 cm, calcule:
a) la longitud de onda;
b) la velocidad de propagación.
Solución:

Para una diferencia de fase $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ le corresponde un $\Delta x = 10$ cm

$\Longrightarrow \boxed{\lambda = 40 \text{ cm}}$

b) La velocidad $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,40}{2 \cdot 10^{-3}} \Longrightarrow \boxed{v = 200 \text{ m/s}}$

6. La expresión matemática de una onda armónica es $y(x,t) = 3\operatorname{sen}(200\pi t - 5x + \pi)$, estando todas las magnitudes en unidades del SI. Determine:
a) La frecuencia y la longitud de onda.
b) La amplitud y la velocidad de propagación de la onda.
Solución:

Comparando con la ecuación de onda:

$A = 3$ m: $\omega = 200\pi$ rad/s; $k = 5$ m^{-1}; y $\varphi_0 = \pi$.

a) De $w = 2\pi f \Longrightarrow \boxed{f = 100 \text{ Hz}}$

De $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{5}\pi \text{ m}}$

b) La amplitud es: $\boxed{A = 3 \text{ m}}$ y $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \Longrightarrow \boxed{v = 40\pi \text{ m/s}}$

7. Una onda armónica unidimensional viene dada por la expresión: $y(x,t) = 4\operatorname{sen}(50t - 4x)$; en el SI de unidades. Determine:
a) la amplitud;
b) el periodo;
c) la longitud de onda;
d) la velocidad de propagación.

Solución:
Comparando la expresión con la ecuación de onda: $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx)$ se tiene:
a) $\boxed{A = 4 \text{ m}}$
b) $w = 50$ rad/s; $\Longrightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{25} \text{ s}}$
c) $k = 4$ m; $\Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\pi}{2} \text{ m}}$
d) $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$; $\Longrightarrow \boxed{v = 12,5 \text{ m/s}}$

8. Una onda transversal se propaga a lo largo de una cuerda horizontal, en el sentido negativo del eje de abscisas, siendo 10 cm la distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase. Sabiendo que la onda está generada por un foco emisor que vibra con un movimiento armónico simple de frecuencia 50 Hz y una amplitud de 4 cm, determine:
a) La velocidad de propagación de la onda.
b) La expresión matemática de la onda, si el foco emisor se encuentra en el origen de coordenadas, y en $t = 0$ la elongación es nula.
c) La velocidad máxima de oscilación de una partícula cualquiera de la cuerda.
d) La aceleración máxima de oscilación en un punto cualquiera de la cuerda.
Solución:
Se conoce: $\lambda = 0,10$ m; $f = 50$ Hz; $A = 0,04$ m y para $t = 0, x = 0$ e $y = 0$.
Y se obtiene de forma inmediata $\omega = 100\pi$ rad/s, $k = 20\pi$ m^{-1}
a) La velocidad de propagación es $v = \lambda \cdot f \Longrightarrow \boxed{v = 5 \text{ m/s}}$
b) Para determinar la ecuación de la onda primero hay que determinar la fase inicial: $0 = A\cos(\varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ y entonces la ecuación será...
$\boxed{y_{(x,t)} = 4 \cdot 10^{-2} \cos(100\pi t + 20\pi x + \frac{\pi}{2})}$
c) Las expresiones de la velocidad y aceleración máximas son ...
$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 4\pi \text{ m/s en } x = 0}$
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 400\pi^2 \text{ m/s}^2 \text{ en } x = A}$

9. Una onda armónica transversal que se propaga en el sentido positivo del eje de las X tiene las siguientes características: amplitud $A = 6 \cdot 10^{-2}$ m, longitud de onda $\lambda = 8\pi \cdot 10^{-2}$ m, velocidad de propagación $v = 1$ m·s^{-1}. Si la elongación de la partícula de abscisa $x = 0$, en el instante $t = 0$, es de 6·10^{-2} m. Determine:
a) La frecuencia angular y el número de onda.
b) La expresión matemática que representa la elongación del movimien-

to de la partícula de abscisa $x = 0$ en función del tiempo.
c) La expresión matemática de la onda.
d) La diferencia de fase de oscilación en un mismo instante entre dos partículas del eje X separadas $6\pi \cdot 10^{-2}$ m.
Solución:
Se conoce: $A = 6 \cdot 10^{-2}$ m; $\lambda = 8\pi \cdot 10^{-2}$ m; $v = 1$ m/s;
y para $t = 0$, $x = 0$ e $y = A$.
a) $v = \dfrac{\lambda}{T} \Rightarrow T = 8\pi \cdot 10^{-2}$ s
La frecuencia angular $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Longrightarrow \boxed{\omega = 25 \text{ rad/s}}$
La velocidad $v = \dfrac{\omega}{k} \Longrightarrow \boxed{k = 25 \text{ m}^{-1}}$
c) y b) La expresión de la onda es: $y_{(x,t)} = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$
que en $(0,0)$ queda $A = A\cos(\varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = 0$ rad
y la ecuación de la onda es: $\boxed{y_{(x,t)} = 6 \cdot 10^{-2}\cos(25t - 25x)}$
La ecuación en $x = 0$ será la de un mas: $\boxed{y_{(0,t)} = 6 \cdot 10^{-2}\cos(25t)}$
d)$8\pi \cdot 10^{-2}$ m $\Rightarrow 2\pi$ rad
$6\pi \cdot 10^{-2}$ m $\Rightarrow \Delta\varphi$ rad $\Longrightarrow \boxed{\Delta\varphi = \dfrac{3}{2}\pi \text{ rad}}$

10. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda tensa de gran longitud, y por ello, una partícula de la misma realiza un movimiento armónico simple en la dirección perpendicular a la cuerda. El periodo de dicho movimiento es de 3 s y la distancia que recorre la partícula entre posiciones extremas es de 20 cm.
a) ¿Cuáles son los valores de la velocidad máxima y de la aceleración máxima de oscilación de la partícula?
b) Si la distancia mínima que separa dos partículas de la cuerda que oscilan en fase es de 60 cm, ¿cuál es la velocidad de propagación de la onda? ¿Cuál es el número de onda?
Solución:
Se conoce: $T = 3$ s; $2A = 20$ cm; de donde $A = 0,1$ m; y $\omega = 2,09$ rad/s;
a) Las expresiones de la velocidad y aceleración máximas son ...
$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 0,21 \text{ m/s}}$
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 0,44 \text{ m/s}^2}$
b) Si $\lambda = 0,6$ m, $v = \dfrac{\lambda}{T} \Rightarrow \boxed{v = 0,2 \text{ m/s}}$; y $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{k = 10,47 \text{ m}^{-1}}$;

11. Dada la expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa de gran longitud: $y = 0,03\,\text{sen}(2\pi t - \pi x)$, donde x e y están expresados en metros y t en

segundos.
a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda?
b) ¿Cuál es la expresión de la velocidad de oscilación de las partículas de la cuerda y la velocidad máxima de oscilación?
c) Para t=0, ¿cuál es el valor del desplazamiento de los puntos de la cuerda cuando $x = 0,5$ m y $x = 1$ m?
d) Para $x = 1$ m, ¿Cuál es el desplazamiento cuando $t = 0,5$ s?
Solución:
De la expresión $y = 0,03\,\mathrm{sen}(2\pi t - \pi x)$
se deduce $\omega = 2\pi$ rad; $k = \pi$ m^{-1}; y $A = 0,03$ m.
a) La velocidad de propagación $v = \frac{\omega}{k} \Longrightarrow \boxed{v = 2 \text{ m/s}}$;
b) La velocidad es $\boxed{v = 0,06\pi\cos(2\pi t - \pi x) \text{ m/s; y } v_{(max)} = 0,06\pi \text{ m/s}}$;
c) Los desplazamientos para $t = 0$ en $x = 0,5$ y $x = 1$ son:
$y_{(0,5;t)} = 0,03\,\mathrm{sen}(-\pi 0,5)$ e $y_{(1;t)} = 0,03\,\mathrm{sen}(-\pi \cdot 1)$
$\boxed{y_{(0,5;t)} = 0,03 \text{ m e } y_{(1;t)} = 0 \text{ m}}$;
d) El desplazamiento para $t = 0,5$ en $x = 1$ es:
$y_{(1;0,5)} = 0,03\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0,5 - \pi \cdot 1) \Longrightarrow \boxed{y_{(1;0,5)} = 0 \text{ m}}$;

12. Una onda armónica transversal se desplaza en la dirección del eje X en sentido positivo y tiene una amplitud de 2 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determine:
a) La velocidad de propagación de la onda.
b) La fase inicial, sabiendo que para $x = 0$ y t=0 la elongación es $y = -2$ cm.
c) La expresión matemática que representa la onda.
d) La distancia mínima de separación entre dos partículas del eje X que oscilan desfasadas $\pi/3$ rad.
Solución:
Se conoce: $A = 0,02$ m; $\lambda = 0,04$ m; $f = 8$ Hz y que para $x = 0$ y $t = 0$ la elongación $y = -0,02$ m. De aquí $\omega = 16\pi$ rad/s y $k = 50\pi$ m^{-1}
a) La velocidad $v = \dfrac{\omega}{k} \Longrightarrow \boxed{v = 0,32 \text{ m/s}}$
b) Para calcular la fase inicial se sustituyen las condiciones iniciales en la ecuación de onda: $-2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2}\cos\varphi_0 \Longrightarrow \boxed{\varphi_0 = \pi \text{ rad}}$
c) La ecuación de onda es: $\boxed{y_{(x,t)} = 2 \cdot 10^{-2}\cos(16\pi t + 50\pi x + \pi)}$
d) La distancia mínima de separación entre dos puntos desfasados $\pi/2$ es:
$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi \Rightarrow \Delta x = \frac{0,04}{2\pi}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\Delta x = 0,66 \text{ cm}}$$

13. La expresión matemática que representa una onda armónica que se propaga a lo largo de una cuerda tensa es: $y_{(x,t)} = 0,01\,\mathrm{sen}(10\pi t +$

$2\pi x+\pi$), donde x e y están dados en metros y t en segundos. Determine:
a) El sentido y la velocidad de propagación de la onda.
b) La frecuencia y la longitud de onda.
c) La diferencia de fase de oscilación entre dos puntos de la cuerda separados 20 cm.
d) La velocidad y la aceleración de oscilación máximas de un punto de la cuerda.
Solución:
Conocida la expresión de la onda: $y_{(x,t)} = 0,01\,\mathrm{sen}(10\pi t + 2\pi x + \pi)$ se comprueba que $A = 0,01$ m; $\omega = 10\pi$ rad/s; $k = 2\pi$ m^{-1} y $\varphi_0 = \pi$ rad.
a) Como el término en x es positivo el sentido de la onda es hacia las X negativas.
La velocidad es $v = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{v = 5 \text{ m/s}}$
b) De $\omega = 2\pi f \Rightarrow \boxed{f = 5 \text{ Hz}}$. Y de $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1 \text{ m.}}$
c) La diferencia de fase $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta x}{\lambda}2\pi \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \dfrac{2}{5}\pi \text{ rad}}$
d) Las expresiones de la velocidad y aceleración máximas son …
$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 0,1\pi \text{ m/s}}$
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm \pi^2 \text{ m/s}^2}$

14. Un punto material oscila en torno al origen de coordenadas en la dirección del eje Y, según la expresión: $y_{(t)} = 2\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{2})$,($y$ en cm y t en s), originando una onda armónica transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X. Sabiendo que dos puntos materiales de dicho eje que oscilan con un desfase de π radianes están separados una distancia mínima de 20 cm, determine:
a) La amplitud y la frecuencia de la onda armónica.
b) La longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.
c) La expresión matemática que representa la onda armónica.
d) La expresión de la velocidad de oscilación en función del tiempo para el punto material del eje X de coordenada x=80 cm, y el valor de dicha velocidad en el instante t=20 s.
Solución:
a) De la ecuación de onda se desprende: $\boxed{A = 2 \text{ cm}}$; y $\omega = \dfrac{\pi}{4}$ rad/s de donde… $\boxed{f = \dfrac{1}{8} \text{ Hz}}$;
b) Si a $\Delta\varphi = \pi$ rad le corresponde un $\Delta x = 20$ cm $\Longrightarrow \boxed{\lambda = 40 \text{ cm}}$;
y como $v = \lambda f \Longrightarrow \boxed{v = 5 \text{ cm/s}}$

c) La ecuación de onda es: $\boxed{y_{(x,t)} = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}t - 5\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (}y\text{ en m y }t\text{ en s)}}$

d) La ecuación de la velocidad es: $\boxed{v_{(x,t)} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t - 5\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ en m/s}}$

La velocidad en $x = 80$ cm será: $\boxed{v_{(x=80,t)} = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t - \frac{9\pi}{2}) \text{ en m/s}}$

La velocidad en $x = 80$ cm y $t = 20$ s será: $\boxed{v_{(x=80,t=20)} = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ cm/s}}$

15. Una onda sinusoidal transversal en una cuerda tiene un período de 0,2 s y se propaga en el sentido negativo del eje X a una velocidad de 30 m/s. En el instante t=0, la partícula de la cuerda en x=0 tiene un desplazamiento positivo de 0,02 m y una velocidad de oscilación negativa de 2 m/s.
a) ¿Cuál es la amplitud de la onda?
b) ¿Cuál es la fase inicial?
c) ¿Cuál es la máxima velocidad de oscilación de los puntos de la cuerda?
d) Escriba la función de onda correspondiente.
Solución:
Se conocen los siguientes datos: $T = 0,2$ s; $\Rightarrow \omega = 10\pi$ rad; $v = 30$ m/s y como $v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\pi}{3}$ m^{-1}
a) y b) Para $x = 0$ y $t = 0 \Rightarrow y_{(0,0)} = 0,02$ m y $v_{(0,0)} = -2$ m/s.
Las ecuaciones del movimiento son:
$y_{(x,t)} = A\,\mathrm{sen}(10\pi t + \frac{\pi}{3}x + \varphi_0)$
$v_{(x,t)} = A \cdot 10\pi\cos(10\pi t + \frac{\pi}{3}x + \varphi_0)$
Y sustituyendo valores en $y_{(x,t)}$ y $v_{(x,t)}$ . . .

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0,02 & = & A\,\mathrm{sen}\,\varphi_0 \\ -2 & = & A \cdot 10\pi\cos\varphi_0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{lcl} \varphi_0 & = & 2,84 \text{ rad} \\ A & = & 0,067 \text{ m} \end{array}$$

c)La expresión de la velocidad máximas es:
$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 2,09 \text{ m/s}}$

d) Finalmente la función de onda es: $\boxed{y_{(x,t)} = 0,067\,\mathrm{sen}(10\pi t + \frac{\pi}{3}x + 2,84)}$

16. La expresión matemática que representa una onda armónica en unidades SI es: $y(x,t) = 0,04\,\mathrm{sen}(2\pi t - \frac{\pi}{4}x)$, Determine:
a) La frecuencia de la onda y su velocidad de propagación.
b) La distancia mínima entre dos puntos que vibran con una diferencia de fase de 120º.
Solución:
De la ecuación de la onda se ve que $A = 0,04$ m; $\omega = 2\pi$ rad; $k = \frac{\pi}{4}$ m.

a) De $\omega = 2\pi f \Rightarrow \boxed{f = 1 \text{ Hz}}$
De $v = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{v = 8 \text{ m/s}}$
b) La distancia mínima entre dos puntos desfasados $\dfrac{2\pi}{3}$ rad es:
$\Delta x = \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \lambda \Rightarrow \Delta x = \dfrac{2/3\pi}{2\pi} \cdot 8 \Rightarrow \boxed{\Delta x = \dfrac{8}{3} \text{ m}}$

1.3. El Sonido

1. El sonido emitido por un altavoz tiene un nivel de intensidad de 60 dB a una distancia de 2 m de él. Si el altavoz se considera como una fuente puntual, determine:
a) La potencia del sonido emitido por el altavoz.
b) A qué distancia el nivel de intensidad sonora es de 30 dB y a qué distancia es imperceptible el sonido.
Datos: El umbral de audición es $I_0 = 10^{-12}$ w·m^{-2}
Solución:
a) La relación entre la intensidad y la sonoridad es: $I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} \Rightarrow$ la intensidad que corresponde a 60 dB es $I = 10^{-6}$ w/m^2.
La Intensidad de una onda es $I = \dfrac{P}{S}$ de donde la potencia de la onda es $P = 10^{-6} \cdot 4\pi 2^2 \Longrightarrow \boxed{P = 1,6\pi \cdot 10^{-5} \text{ w}}$
b) A 30 dB le corresponde una intensidad $I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{30}{10}}$
$\Rightarrow I' = 10^{-9}$ w/m^2.
La intensidad de una onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del foco: $\dfrac{I}{I'} = \dfrac{r'^2}{r^2}$ que sustituyendo valores: $\dfrac{10^{-6}}{10^{-9}} = \dfrac{r'^2}{2^2}$
$\Rightarrow \boxed{r' = 63,24 \text{ m}}$
Un sonido es imperceptible si: $I' = 10^{-12}$ w/m$^2 \Rightarrow \dfrac{10^{-6}}{10^{-12}} = \dfrac{r'^2}{2^2}$
$\Rightarrow \boxed{r' = 2 \cdot 10^3 \text{ m}}$

2. Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 10^{-6} w.
a) Determine el nivel de intensidad expresado en decibelios a 1 m de la fuente sonora.
b) ¿A qué distancia de la fuente sonora el nivel de intensidad se ha reducido a la mitad del valor anterior?
Dato: La intensidad umbral de audición es $I_0 = 10^{-12}$ w·m^{-2}.
Solución:
a) La intensidad es: $I = \dfrac{P}{S} \Rightarrow I = \dfrac{10^{-6}}{4\pi \cdot 1^2} \Rightarrow I = 7,96 \cdot 10^{-8}$ w/m^2
El nivel de intensidad medido en decibelios es la sonoridad $\Rightarrow \beta = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$
$\Rightarrow \beta = 10 \log \dfrac{7,96 \cdot 10^{-8}}{10^{-12}} \Rightarrow \boxed{\beta = 49 \text{ dB}}$
b) La intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del foco y se calcula la intensidad para la que la sonoridad es 24,5 dB:
$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \Rightarrow I = 10^{-12} \cdot 10^{24,4/10} \Rightarrow I = 2,82 \cdot 10^{-10}$
y ahora la intensidad:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{7,96 \cdot 10^{-8}}{2,82 \cdot 10^{-10}} = \frac{r_2^2}{1^2} \Rightarrow\Rightarrow \boxed{r_2 = 16,79 \text{ m}}$$

3. Una bolita de 0,1 g de masa cae desde una altura de 1 m, con velocidad inicial nula. Al llegar al suelo el 0,05 por ciento de su energía cinética se convierte en un sonido de duración 0,1 s.
a) Halle la potencia sonora generada.
b) Admitiendo que la onda sonora generada puede aproximarse a una onda esférica, estime la distancia máxima a la que puede oírse la caída de la bolita si el ruido de fondo sólo permite oír intensidades mayores que 10^{-8} w·m^{-2}.
Dato: Aceleración de la gravedad g = 9,8 m·s^{-2}.
Solución:
a) El 0,05 % de la energía de la bolita se combierte en sonido:

$$E_{sonido} = \frac{0,05}{100}mgh \Longrightarrow E_{sonido} = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 1 = 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

La potencia es: $P = \dfrac{E}{t} \Rightarrow P = \dfrac{4,9 \cdot 10^{-7}}{0,1} \Rightarrow \boxed{P = 4,9 \cdot 10^{-6} \text{ w}}$

b) ¿A qué distancia la intensidad será 10^{-8} w?

Como $I = P/S \Rightarrow 10^{-8} = \dfrac{4,9 \cdot 10^{-6}}{4\pi r^2} \Rightarrow \boxed{r = 6,24 \text{ m}}$

4. El oído humano puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas entre 20 y 20000 Hz.
a) ¿A qué longitudes de onda corresponden estas frecuencias en el aire?
b) Si el oído humano es capaz de distinguir dos sonidos que se emiten con un intervalo de 0,1 s, ¿a qué distancia mínima de una pared debe situarse una persona para que perciba el eco que se produce en ella?
Dato: velocidad del sonido en el aire = 340 m/s.
Solución:
a) La longitud de onda está relacionada con la frecuencia: $v = \lambda/f$
$\Longrightarrow \boxed{\lambda_{20\ Hz} = 17 \text{ m};\ \lambda_{20000\ Hz} = 0,017 \text{ m};}$
b) El espacio que recorre el sonido en 0,1 s es $e = vt \Rightarrow 340 \cdot 0,1 = 34$ m.
Como el recorrido es de ida y vuelta la pared ha de estar a $\boxed{17 \text{ m}}$

5. El nivel de intensidad sonora de la sirena de un barco es de 60 dB a 10 m de distancia. Suponiendo que la sirena es un foco emisor puntual, calcule:
a) El nivel de intensidad sonora a l km de distancia.
b) La distancia a la que la sirena deja de ser audible.

Dato: Intensidad umbral $I_0 = 10^{-12}$ w·m^{-2}.
Solución:
La intensidad del la onda a 10 m es:
$I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} \Rightarrow I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{60}{10}} \Rightarrow I = 10^{-6}$ w/m^2
a) La intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia.
$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{10^{-6}}{I_2} = \frac{1000^2}{10^2} \Rightarrow \boxed{I_2 = 10^{-10}\ \text{w/m}^2}$
b) Cuando el sonido ya no es audible la intensidad será: $I_2 = 10^{-2}$ w/m^2
$\frac{10^{-6}}{10^{-12}} = \frac{r_2^2}{10^2} \Rightarrow \boxed{r_2 = 10^4\ \text{m}}$

6. Razone si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:
a) La intensidad de la onda sonora emitida por una fuente puntual es directamente proporcional a la distancia a la fuente.
b) Un incremento de 30 decibelios corresponde a un aumento de la intensidad del sonido en un factor 1000.
Solución:
a) Falso. La intensidad de una onda sonora es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Si consideramos que la potencia de una onda es constante, -solo depende del cuadrado de la frecuencia y del cuadrado de la amplitud- y la onda es esférica: $I = \frac{P}{S} \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi r^2}$
b) Comparando los niveles de intensidad sonora:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \beta_1 & = & 10\log\frac{I_1}{I_0} \\ \\ \beta_2 & = & 10\log\frac{I_2}{I_0} \end{array}\right. \left\| \begin{array}{lcl} \beta_1 - \beta_2 & = & 10\left(\log\frac{I_1}{I_0} - \log\frac{I_2}{I_0}\right) \\ \\ 30 & = & 10\left(\log\frac{I_1}{I_2}\right) \quad \Rightarrow \boxed{\frac{I_1}{I_2} = 10^3} \end{array}\right.$$

7. Una onda sonora que se propaga en el aire tiene una frecuencia de 260 Hz.
a) Describa la naturaleza de la onda sonora e indique cuál es la dirección en la que tiene lugar la perturbación, respecto a la dirección de propagación.
b) Calcule el periodo de esta onda y su longitud de onda.
Datos: velocidad del sonido en el aire v = 340 m·s^{-1}
Solución:
a) Las ondas de sonido son ondas mecánicas, materiales, de presión y longitudinales, es decir, que la velocidad de vibración de las partículas es paralela a la dirección de propagación de la onda.
b) El periodo $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{T = 3,85 \cdot 10^{-3}\ \text{s}}$

La longitud de onda $\lambda = \dfrac{v}{f} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1,31 \text{ m}}$

8. Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 80 w. Calcule:
a) La intensidad sonora en los puntos distantes 10 m de la fuente.
b) ¿A qué distancia de la fuente el nivel de intensidad sonora es de 130 dB?
Dato: Intensidad umbral de audición $I_0 = 10^{-12}$ w·m^{-2}.
Solución:

a) La intensidad a 10 m es: $I = \dfrac{P}{S} \Rightarrow I = \dfrac{80}{4\pi 10^2} \Rightarrow \boxed{I = 0,064 \text{ w}}$

b) La intensiad que corresponde a 130 dB:

$I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} \Rightarrow I_2 = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{130}{10}} \Rightarrow I_2 = 10 \text{ wm}^{-2}$

La intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{0,064}{10} = \frac{r_2^2}{10} \Rightarrow \boxed{r_2 = 0,31 \text{ m}}$$

9. Se realizan dos mediciones del nivel de intensidad sonora en las proximidades de un foco sonoro puntual, siendo la primera de 100 dB a una distancia x del foco, y la segunda de 80 dB al alejarse en la misma dirección 100 m más.
a) Obtenga las distancias al foco desde donde se efectúan las mediciones.
b) Determine la potencia sonora del foco.
Dato: Intensidad umbral de audición $I_0 = 10^{-12}$ w·m^{-2}.
Solución:

Se miden 100 dB a x m y 80 dB a 100+x m de distancia:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{I_0 \cdot 10^{\frac{\beta_1}{10}}}{I_0 \cdot 10^{\frac{\beta_2}{10}}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{I_0 \cdot 10^{\frac{100}{10}}}{I_0 \cdot 10^{\frac{80}{10}}} = \frac{(100+x)^2}{x^2} \Rightarrow 10^2 = \frac{(100+x)^2}{x^2}$$

$\Rightarrow \boxed{x = 11,11 \text{ m y } 100 + x = 111,11 \text{ m}}$

b) La potencia se puede determinar a partir de cualqueira de las dos mediciones:

$I = P/S \Rightarrow P = IS \Rightarrow P = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta_1}{10}} 4\pi r_1^2 = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta_2}{10}} 4\pi r_2^2 \Rightarrow \boxed{P = 15,51 \text{ w}}$